

Nouvelles approches pour l'identification en élastodynamique : écart à la réciprocité, gradient topologique

Marc Bonnet & Andrei Constantinescu



Laboratoire de Mécanique des Solides
CNRS UMR 7649
Département de Mécanique, Ecole Polytechnique,
91120 Palaiseau, France

"Interférence d'ondes", GDR ondes, Besançon, 21–23 novembre 2005

Elasticité linéaire (HPP)

Equilibre élastodynamique

$$[\mathcal{A}_C \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad [\mathcal{A}_C \mathbf{u}](\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{A}_C \mathbf{u} := \operatorname{div} [\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}]$$

conditions initiales $(\mathbf{x} \in \Omega)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$$

conditions aux limites $(\mathbf{x}, t) \in S_u \cup S_p \times [0, T]$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}^D(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^D(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Problèmes d'identification

- fissures, cavités inclusions
- distributions des modules élastiques, vitesses des ondes
- conditions aux limites
- contraintes résiduelles

Identification fissures - Ecart à la réciprocité

- domaine temporel :

$$[\mathcal{A}_C \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

- Solution : Recherche du zero d'une fonction
- Principe des puissances virtuelles

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}[\mathbf{w}] dv + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dv + \int_{S_p} \mathbf{p}^D \cdot \mathbf{w} ds = \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} dv \quad \forall \mathbf{w}$$

- Principe de réciprocité de Maxwell-Betti

Identification des cavites, inclusions - Sensibilité topologique

- domaine fréquentiel :

$$[\mathcal{A}_C \mathbf{u}](\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- domaine temporel :

$$[\mathcal{A}_C \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

- Solution : minimisation d'une fonction coût
- Sensibilité topologique \longrightarrow Gradient distribué

Ecart à la réciprocité

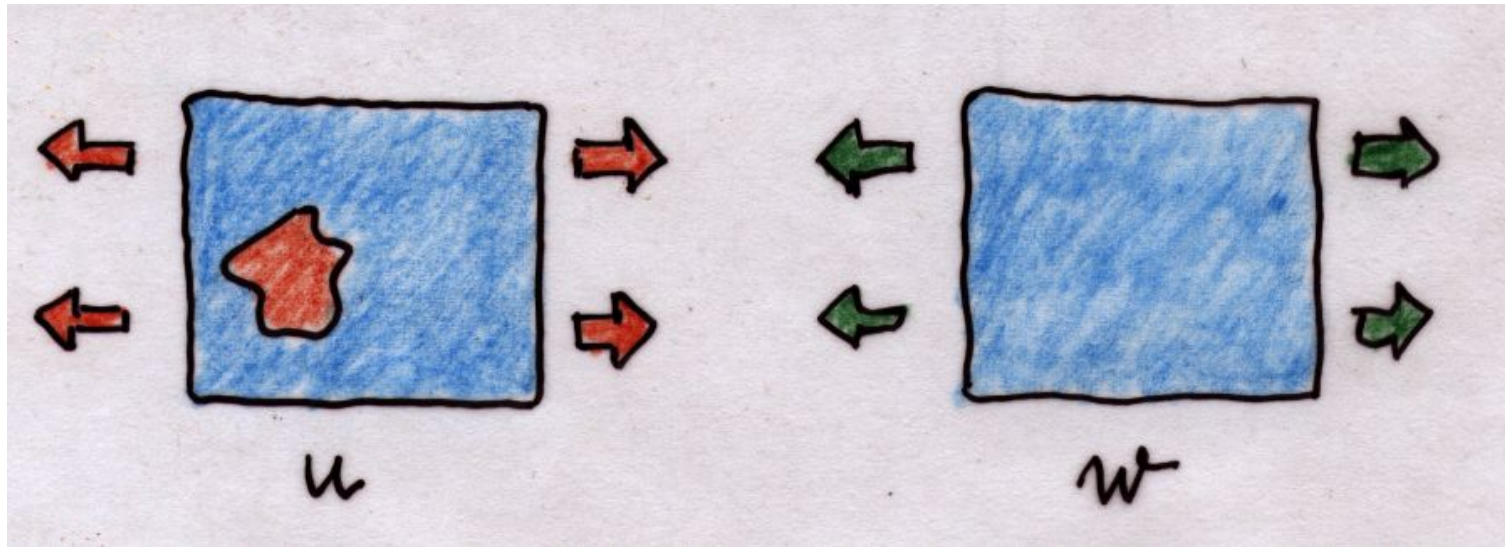
Bui, H.D., Constantinescu, A., and Maigre, H. Diffraction acoustique inverse de fissure plane : solution explicite pour un solide borné. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, 327 :971–976, 1999.

Bui, H.D., Constantinescu, A., and Maigre, H. Numerical identification of planar cracks in elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, **20** :993–1001, 2004.

Bui, H.D., Constantinescu, A., and Maigre, H. An exact inversion formula from determining a planar fault from boundary measurements *Inverse and Ill Posed Problems*, **13**(6) pp. 1–13, (2005)

Bonnet, M., Constantinescu A. : Inverse problems in elasticity, *Inverse Problems*, **21** :R1–R50 (2005)

Réciprocité - Principe de Maxwell-Betti



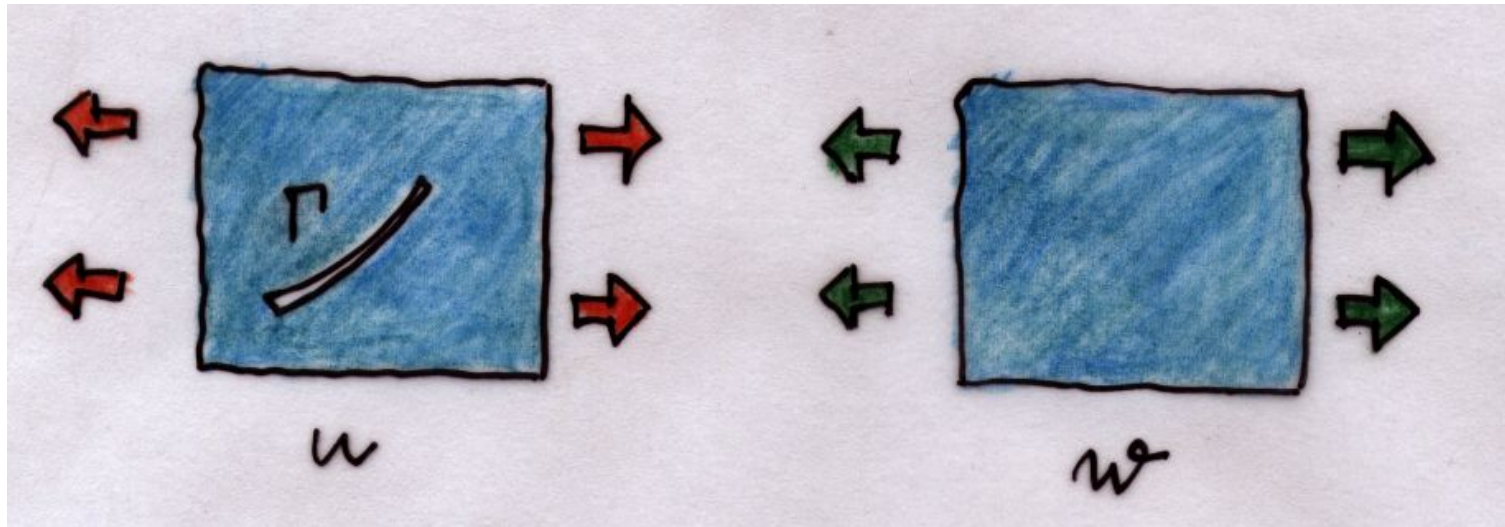
Problème direct $\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$

Problème adjoint $\operatorname{div} \mathbf{C} \nabla \mathbf{w} = \rho \ddot{\mathbf{w}}$

Ecart à la réciprocité

$$\begin{aligned}
 \mathcal{RB}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \delta \mathbf{C}) &= \int_0^\infty \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \delta \mathbf{C} : \nabla \mathbf{w} \, ds \, dt \\
 &+ \int_0^\infty \int_{\partial \Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \} \, ds \, dt \\
 &+ \int_{\Omega \setminus \Gamma} [\mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{w} - \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}]_0^\infty \, dv
 \end{aligned}$$

Réciprocité - Identification des fissures



Problème direct $\text{div } \mathbf{C} \nabla \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$

Problème adjoint $\text{div } \mathbf{C} \nabla \mathbf{w} = \rho \ddot{\mathbf{w}}$

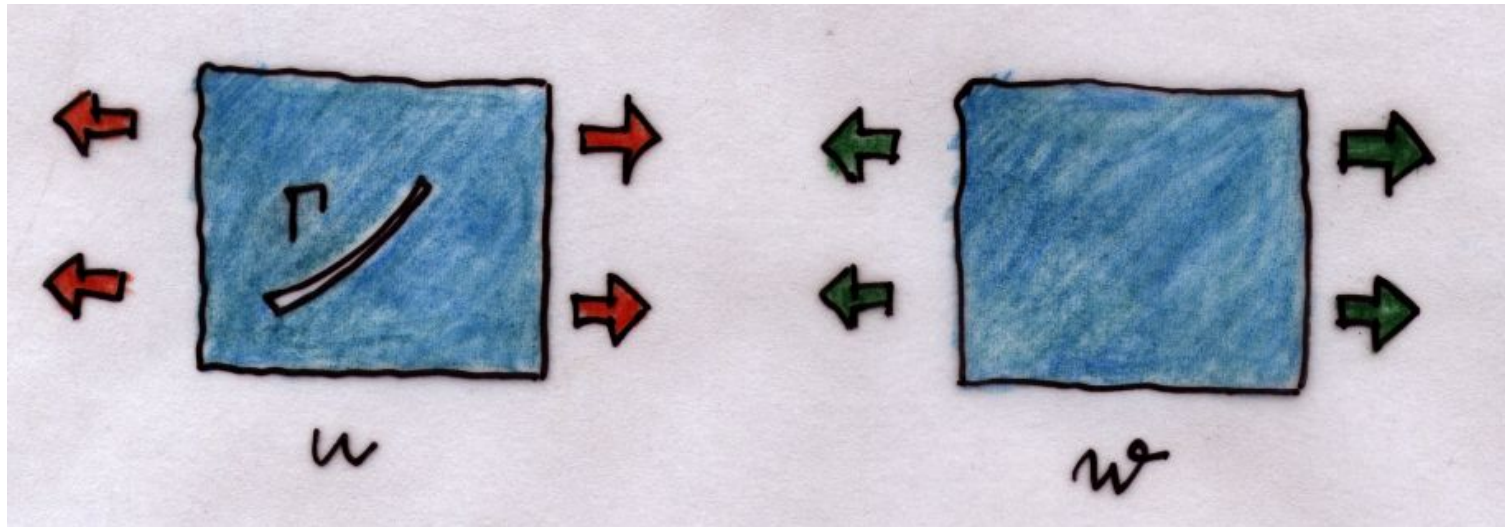
Ecart à la réciprocité

$$\begin{aligned}
 \mathcal{RB}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \Gamma) &= \int_0^\infty \int_\Gamma [[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} \, ds \, dt \\
 &= \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \} \, ds \, dt \\
 &+ \int_{\Omega \setminus \Gamma} [\mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{w} - \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}]_0^\infty \, dv
 \end{aligned}$$

Resultats

- électrostatique & thermique : S. Andrieux & A. Ben Abda [1996], H.D.Bui & A. Ben Abda [1998]
- acoustique, dynamique : H.D.Bui, AC, H. Maigre [1999, 2004]
- equation Helmholtz - enclosure method : Ikehata [2000, ...]

Réciprocité - Identification des fissures



Problème direct $\text{div } C \nabla u = \rho \ddot{u}$

Problème adjoint $\text{div } C \nabla w = \rho \ddot{w}$

Ecart à la réciprocité

$$\begin{aligned} \mathcal{RB}(u, w, \Gamma) &= \int_0^\infty \int_\Gamma [[u]] \cdot \sigma[w] \cdot n \, ds \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\partial\Omega} \{u \cdot \sigma[w] \cdot n - w \cdot \sigma[u] \cdot n\} \, ds \, dt + \int_{\Omega \setminus \Gamma} [u \cdot \partial_t w - \partial_t u \cdot w]_0^\infty \, dv \end{aligned}$$

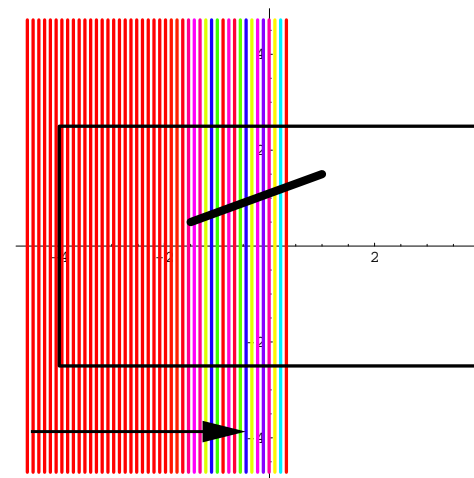
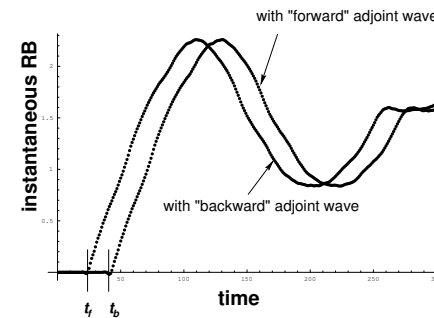
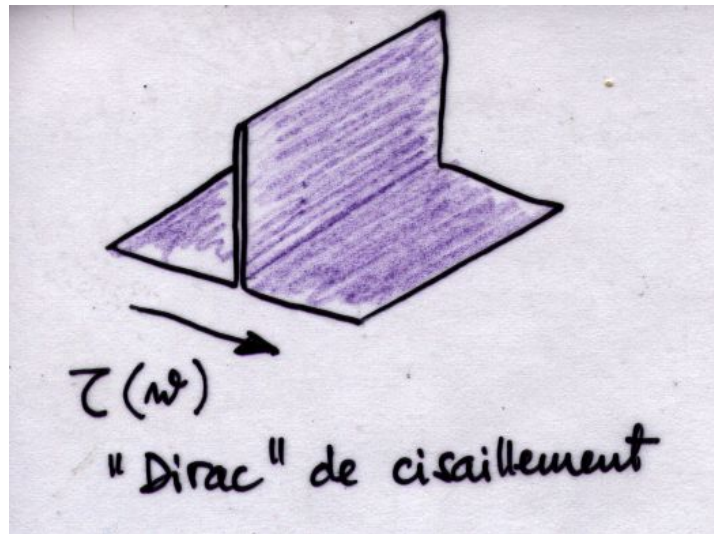
3 familles des champs adjoints

- orientation du plan
- position du plan
- extension de la fissure

Réciprocité - Identification des fissures

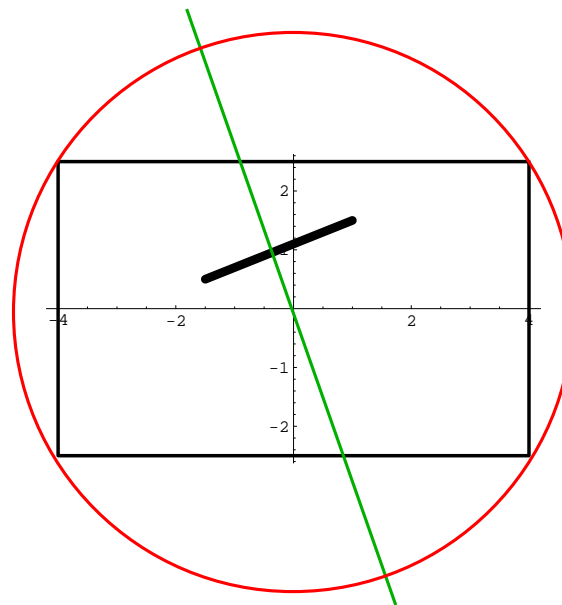
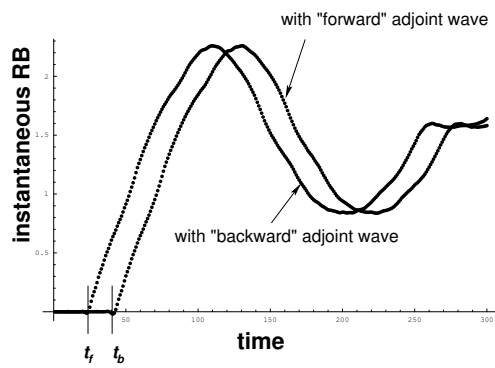
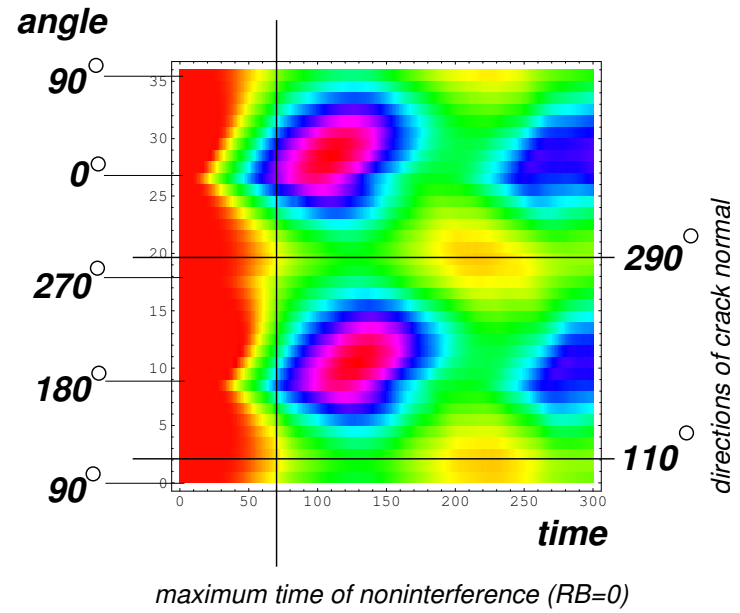
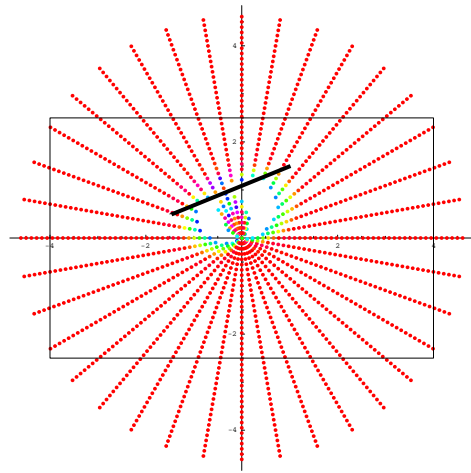
Ecart instantané à la réciprocité \longrightarrow 1 famille d'ondes adjointes

$$\mathcal{RB}(t) = \int_{\Gamma_c} [[\mathbf{u}]] \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{w}] \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{n} \} \, ds$$

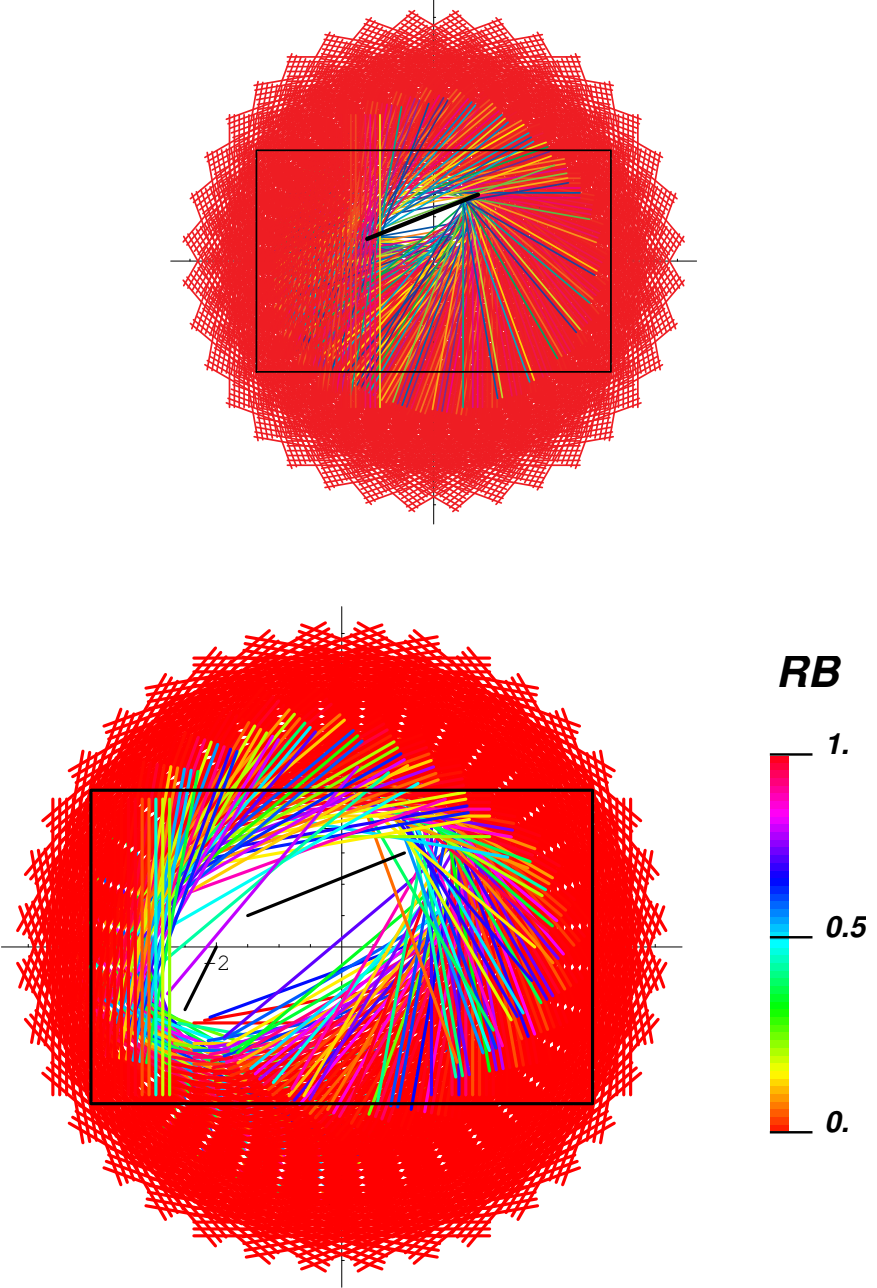


Propagation of adjoint wave

Réciprocité - Identification des fissures



Réciprocité - Identification des fissures - Enveloppe convexe



Sensibilité topologique

Guzina, B. B. and Bonnet, M. : Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **57** :161–179 (2004).

Bonnet, M. and Guzina, B. B. : Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative, *Int. J. Num. Meth. Engng* **61** :2344–2373 (2004)

Bonnet, M. : Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* (2006, à paraître)

Guzina, B. B. and Bonnet, M. : Small-inclusion asymptotic for inverse problems in acoustics (soumis, 2005)

Bonnet, M. : Inverse scattering by small-obstacle expansion of misfit function (en preparation)

Nemitz, N., Bonnet, M. : Identification d'obstacles en acoustique dans des domaines tridimensionnels bornés, *Revue Eur. Elements Finis* (2006, à paraître)

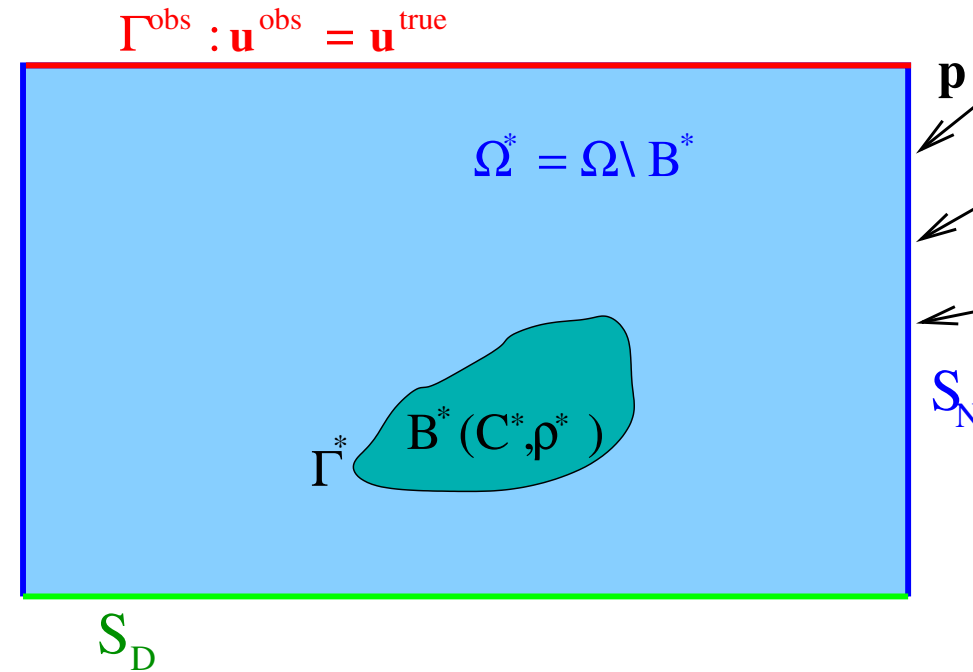
Bonnet, M., Constantinescu A. : Inverse problems in elasticity, *Inverse Problems*, **21** :R1–R50 (2005)

Inclusion élastique pénétrable $(B, \mathcal{C}, \rho)^{\text{true}}$ dans un solide élastique (\mathcal{C}, ρ)

$$(B, \mathcal{C}, \rho)^{\text{true}} = \arg \min_{(B^*, \mathcal{C}^*, \rho^*)} \mathcal{J}(B^*, \mathcal{C}^*, \rho^*)$$

$$\mathcal{J}_{\text{LS}}(B^*, \mathcal{C}^*, \rho^*) = \frac{1}{2} \int_{S^{\text{obs}}} |\mathbf{u}_{\Gamma} - \mathbf{u}^{\text{obs}}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}$$

$$\mathcal{J}(B^*, \mathcal{C}^*, \rho^*) = \int_{S^{\text{obs}}} \varphi(\mathbf{u}_{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\boldsymbol{\xi}}$$



où \mathbf{u}_{Γ} solution du problème direct

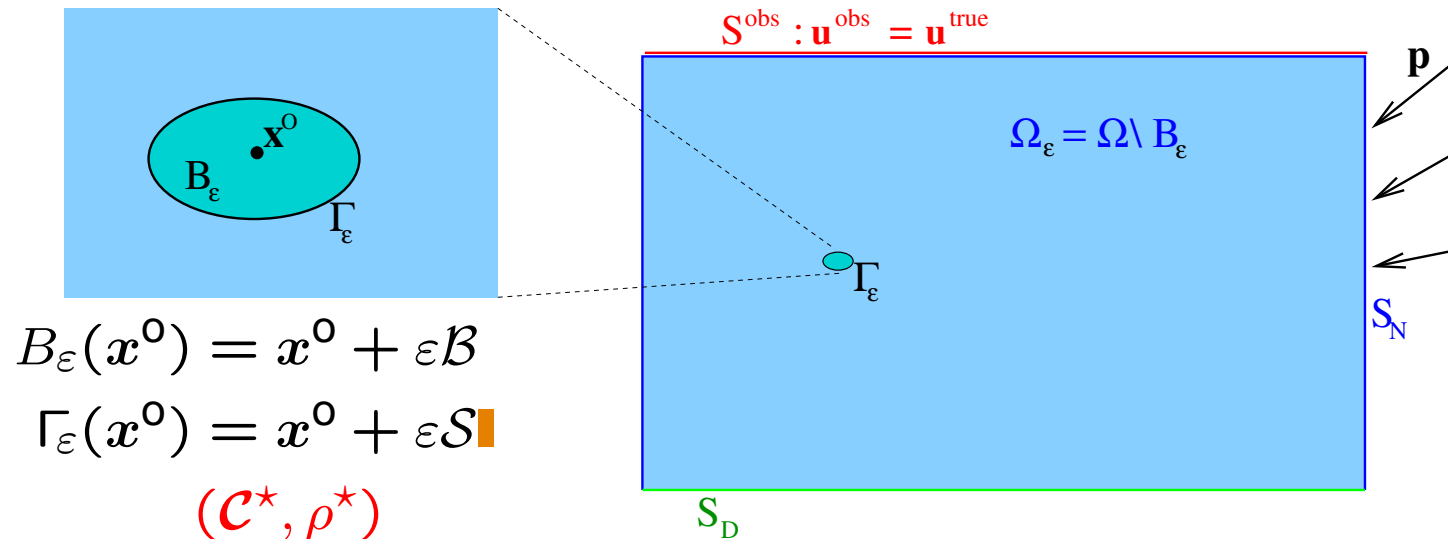
$$\mathcal{L}(\omega)\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad (\text{in } \Omega \setminus B^*),$$

$$\mathcal{L}(\omega)\mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad (\text{in } B^*)$$

$$\mathbf{t}[\mathbf{u}^*] = \mathbf{p} \quad (\text{on } S_N), \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad (\text{on } S_D),$$

$$[[\mathbf{u}^*]] = [[\mathbf{t}[\mathbf{u}^*]]] = \mathbf{0} \quad (\text{on } \Gamma)$$

Sensibilité topologique : initialement introduit pour l'optimisation topologique des structures [Eschenauer *et al* (1994) ; Sokolowski, Zochowski (1999) ; Garreau *et al*, 2001]



$$\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon) = \mathcal{J}(\Omega) + \varepsilon^3 |\mathcal{B}| \mathcal{T}(x^0) + o(\varepsilon^3) \quad (\varepsilon \ll \text{Diam}(\Omega), B_\varepsilon(x^0) \subset \Omega)$$

$$\mathcal{T}(x^0) = \text{Re} \left\{ \nabla \hat{u}(x^0) : \mathcal{A}(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*) : \nabla u(x^0) - (\rho - \rho^*) \omega^2 \hat{u}(x^0) \cdot u(x^0) \right\}$$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*)$: tenseur 4e ordre **connu** ; u champ libre, \hat{u} état adjoint tels que

$$\mathcal{L}(\omega)u = 0 \text{ (in } \Omega), \quad t[u] = p \text{ (on } S_N), \quad u = 0 \text{ (on } S_D),$$

$$\mathcal{L}(\omega)\hat{u} = 0 \text{ (in } \Omega), \quad t[\hat{u}] = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{ (on } S^{\text{obs}}), \quad t[\hat{u}] = 0 \text{ (on } S_N \setminus S^{\text{obs}}), \quad \hat{u} = 0 \text{ (on } S_D).$$

- **Idée heuristique** : chercher les régions de Ω où $\mathcal{T}(x^0)$ prend des valeurs négatives

- Elastodynamique, cavité : cas particulier où ($\mathcal{C}^* = 0, \rho^* = 0$).■
- Cavité sphérique de rayon ε , élasticité isotrope :

$$\mathcal{A} = \frac{3(1-\nu)}{2\mu(7-5\nu)} \left[5 \mathbf{I}_4^{\text{sym}} - \frac{1+5\nu}{2(1+\nu)} \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \right]$$

- Formulation en temps :

$$\mathcal{T}(x^0) = \left[\sigma[\hat{u}] \star \left(\mathcal{A}(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{C}^*) : \sigma[u] \right) + \rho \hat{u} \star \dot{u} \right] (x^0, T)$$

$$\text{avec } [f \star g](t) \equiv \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \text{ (convolution)}$$

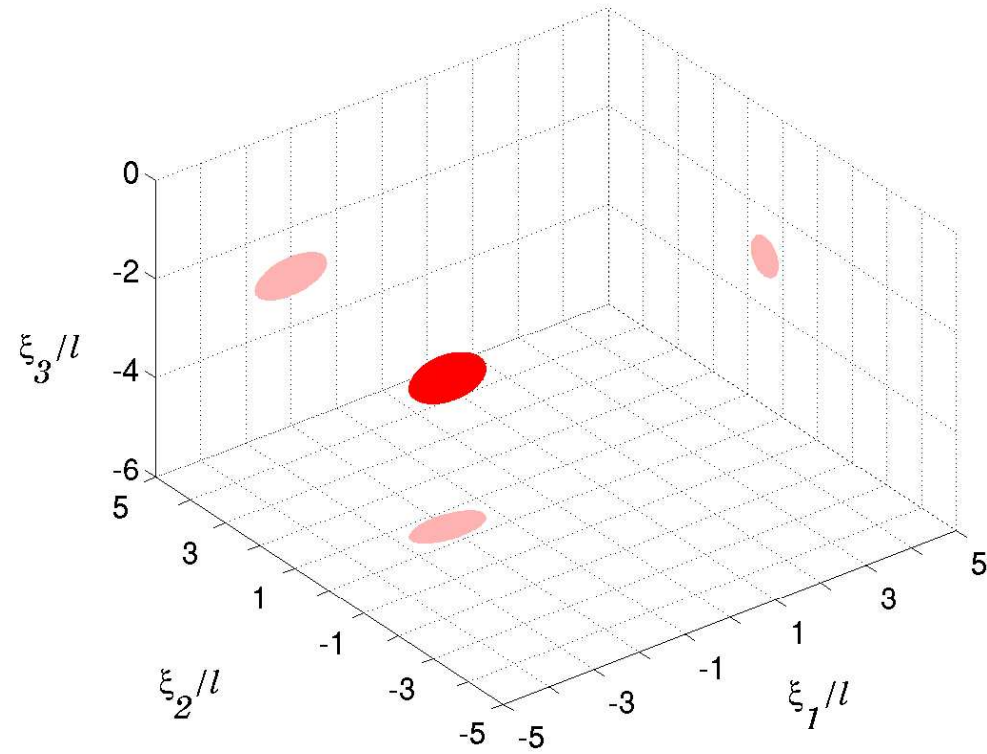
- Acoustique linéaire, obstacle pénétrable :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x^0) &= \text{Re} \left[\nabla \hat{u} \cdot \mathbf{A}(\mathcal{S}, \rho/\rho^*) \cdot \nabla u - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{c^{*2}} \frac{\rho}{\rho^*} \right) \hat{u} u \right] (x^0) \quad (\text{fréquence}) \\ &= \left[\nabla \hat{u} \star \left(\mathbf{A}(\mathcal{S}, \rho/\rho^*) \cdot \nabla u \right) + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{c^{*2}} \frac{\rho}{\rho^*} \right) \hat{u} \dot{u} \right] (x^0, T) \quad (\text{temps}) \end{aligned}$$

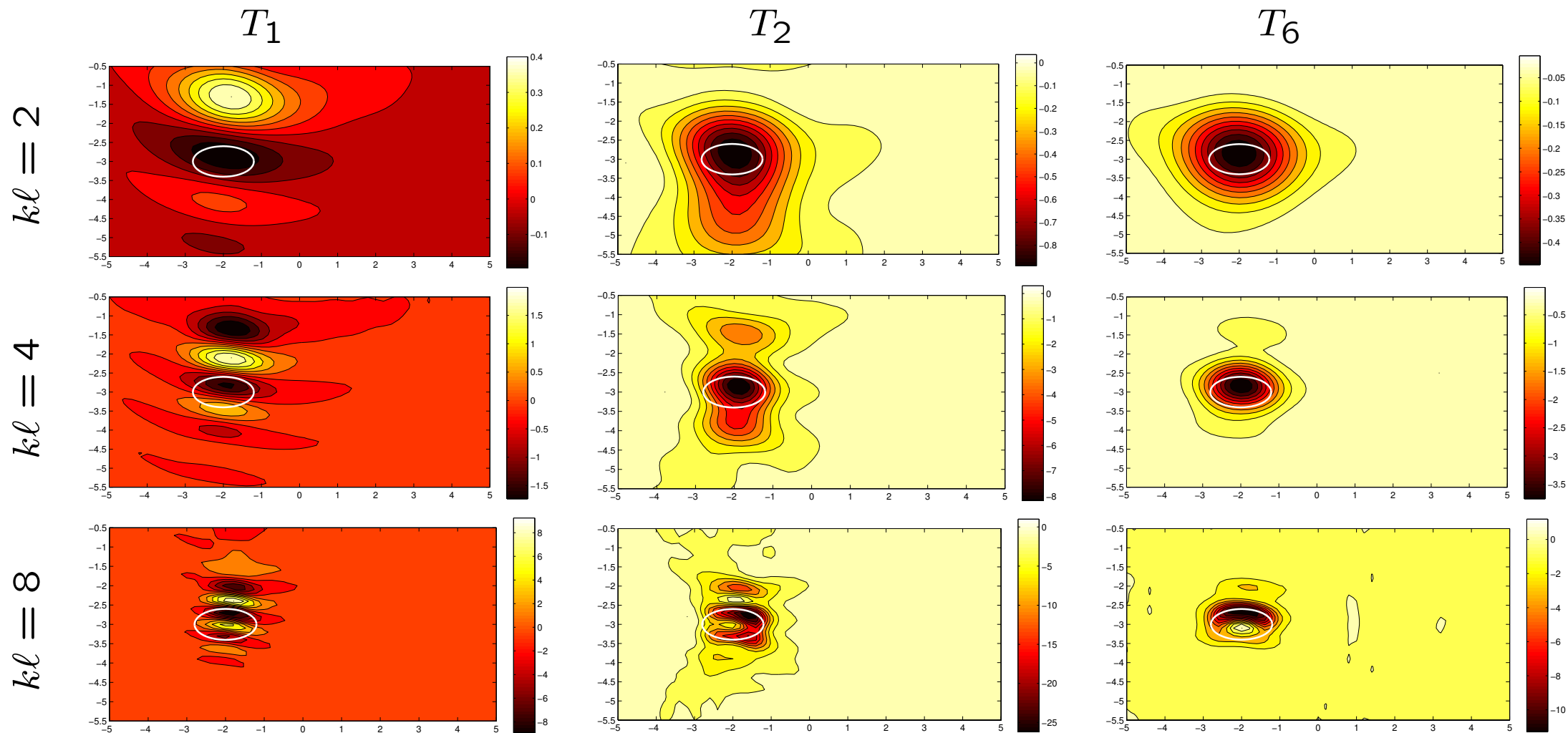
- Cas particulier de l'obstacle pénétrable sphérique :

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}, \rho/\rho^*) = \frac{3(\rho^* - \rho)}{2\rho^* + \rho}$$

One penetrable inclusion $((\beta, \gamma) = (2, 0.5))$



Milieu de référence : demi-espace $\xi_3 \leq 0$

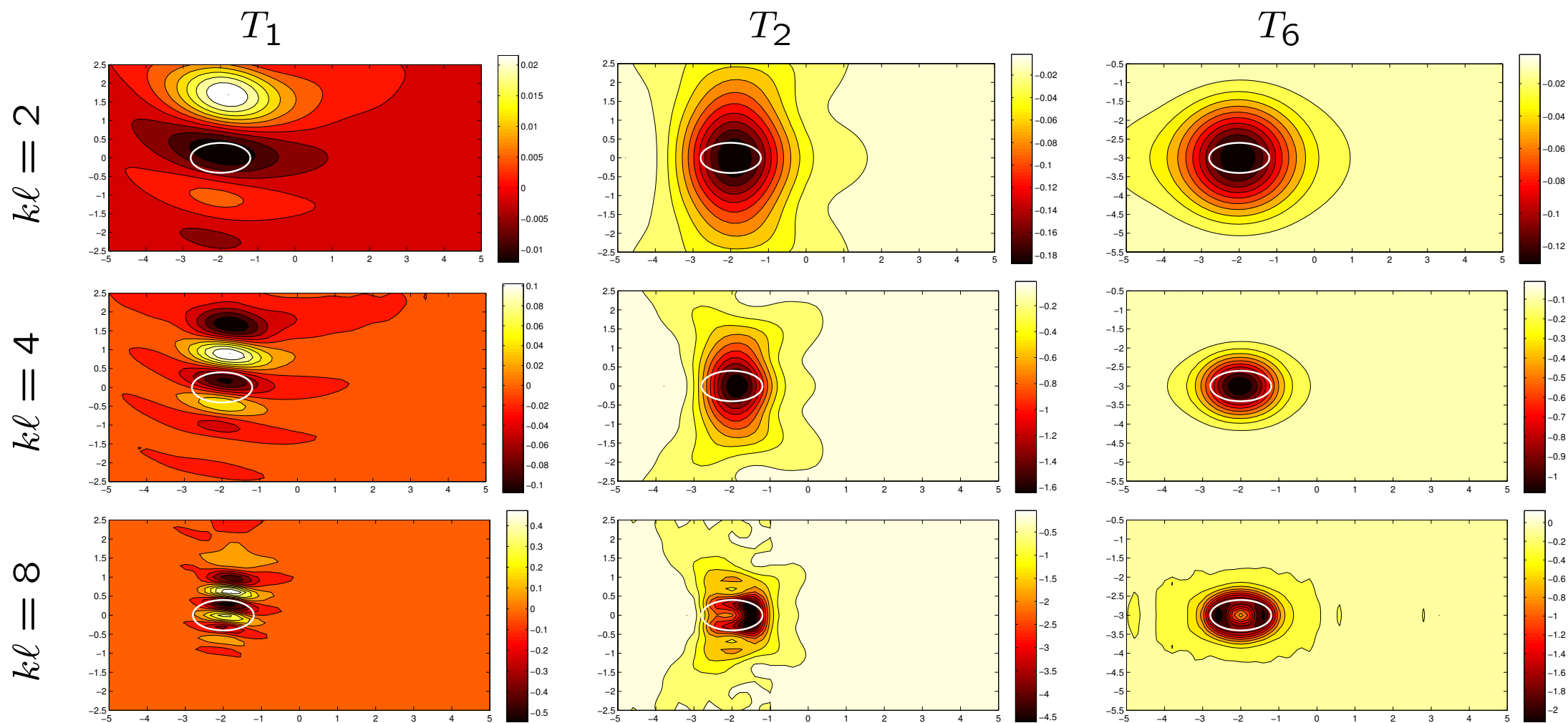


T_1 : configuration de test avec 2 plans sources/mesures (haut)

T_2 : configuration de test avec 2 plans sources/mesures (haut + bas)

T_6 : configuration de test avec 6 plans sources/mesures (boîte)

Milieu de référence : espace infini

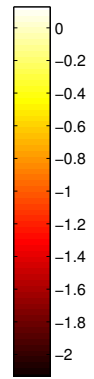
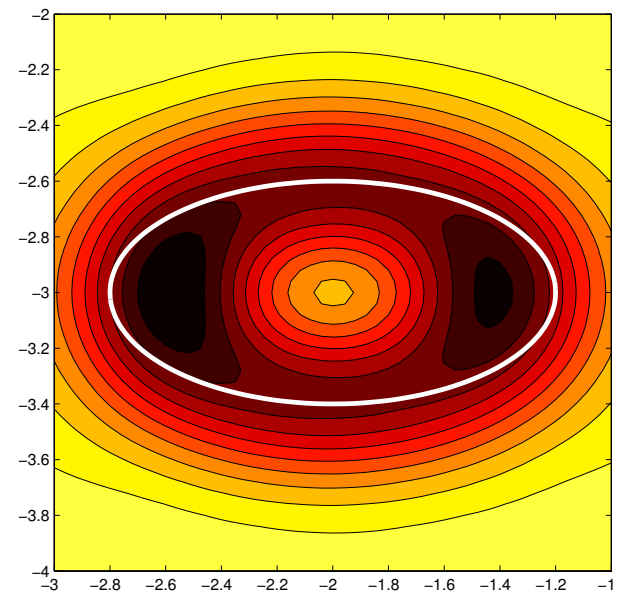
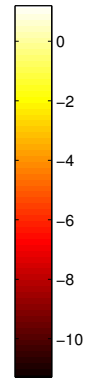
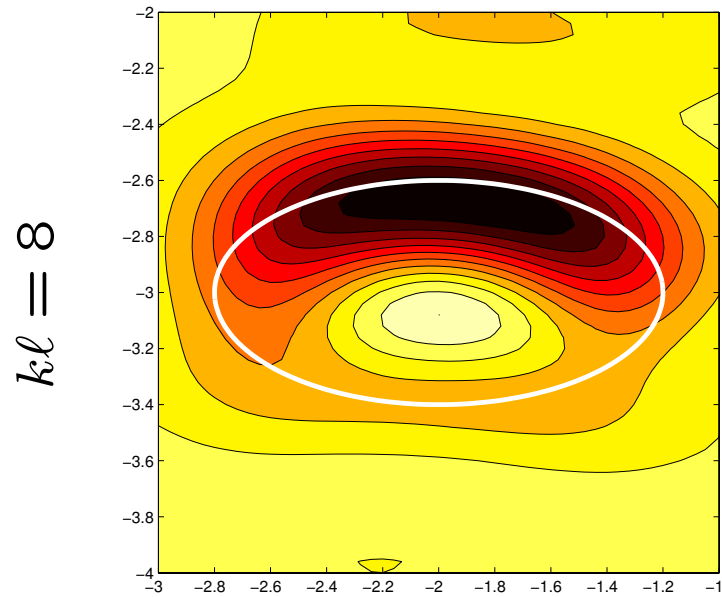
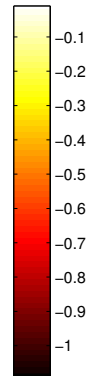
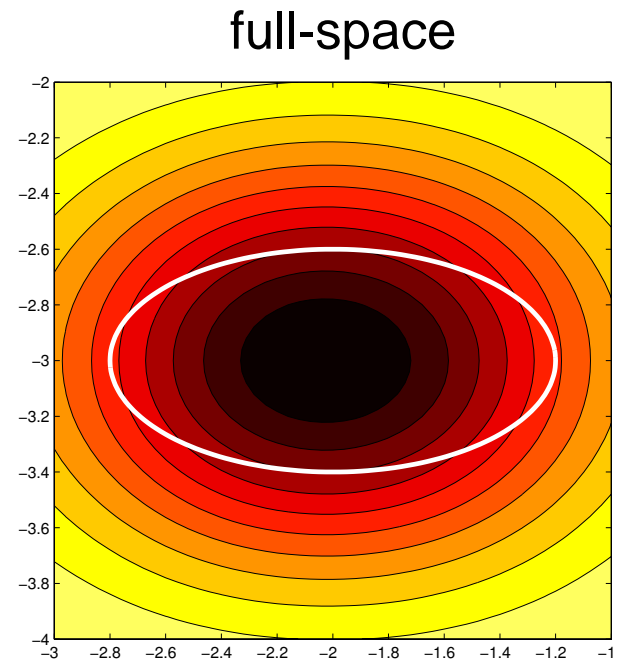
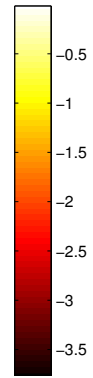
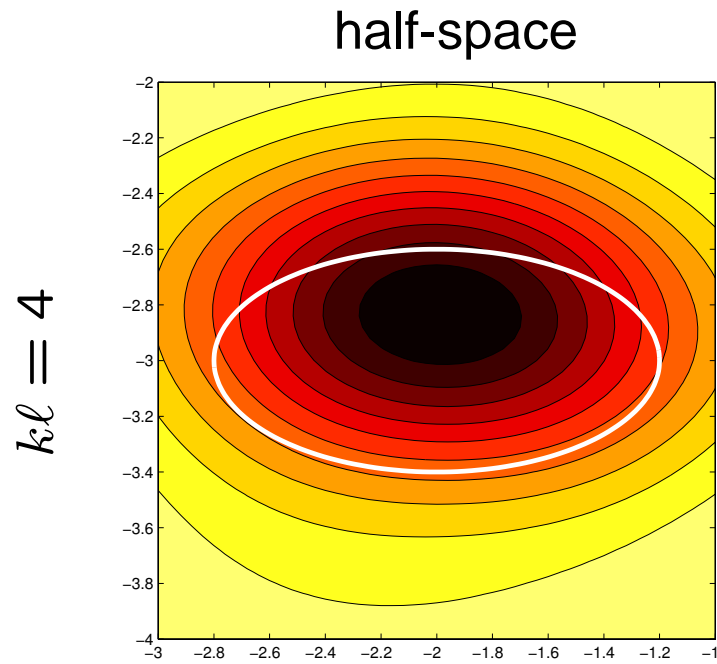


T_1 : configuration de test avec 2 plans sources/mesures (haut)

T_2 : configuration de test avec 2 plans sources/mesures (haut + bas)

T_6 : configuration de test avec 6 plans sources/mesures (boîte)

Agrandissement (configuration T_6)



Développement $O(\varepsilon^6)$ de la fonction-coût (Helmholtz, obstacle rigide)

$$J(\Omega_\varepsilon) = J(\Omega) + \mathcal{T}(x^0)\varepsilon^3 + \mathcal{T}_4(x^0)\varepsilon^4 + \mathcal{T}_5(x^0)\varepsilon^5 + \mathcal{T}_6(x^0)\varepsilon^6 + o(\varepsilon^6)$$

- S arbitraire : $\mathcal{T}_4(x^0)$, $\mathcal{T}_5(x^0)$, $\mathcal{T}_6(x^0)$ connus, fonction de S ;
- S sphère unité : forme explicite du développement via ■

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4(x^0) &= 0 & \mathcal{T}_5(x^0) &= \frac{4\pi}{9} \nabla \nabla u : \nabla \nabla \hat{u} - \frac{3\pi}{5} k^2 \nabla u \cdot \nabla \hat{u} + \frac{88\pi}{135} k^4 u \hat{u} \\ \mathcal{T}_6(x^0) &= \left(\frac{4\pi}{9} i k^5 u - \frac{4\pi k^2}{3} D_1 \right) \hat{u} + \left(\frac{\pi}{3} i k^3 \nabla u + 2\pi \mathbf{E} \right) \cdot \nabla \hat{u} + \frac{1}{2} \int_{S^{\text{obs}}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} |V_1|^2 d\Gamma_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V_1(x) + \int_{S_N} V_1(\xi) \nabla G(x^0, \xi, k) \cdot \mathbf{n}(\xi) d\Gamma_\xi - \int_{S_D} W_1(\xi) G(x^0, \xi, k) d\Gamma_\xi \\ = \left[2\pi \nabla G(x, x^0; \omega) \cdot \nabla u(x^0) - \frac{4\pi}{3} k^2 G(x, x^0; \omega) u(x^0) \right] \quad (x \in S_N \cup S_D) \end{aligned}$$

$$D_1(x^0) = - \int_{S_N} V_1(\xi) \nabla G(x^0, \xi, k) \cdot \mathbf{n}(\xi) d\Gamma_\xi + \int_{S_D} W_1(\xi) G(x^0, \xi, k) d\Gamma_\xi$$

$$\mathbf{E}(x^0) = \int_{S_N} V_1(\xi) \left[\nabla^{(2)} G(x^0, \xi, k) \cdot \mathbf{n}(\xi) \right] d\Gamma_\xi - \int_{S_D} W_1(\xi) \nabla G(x^0, \xi) d\Gamma_\xi$$

Recherche globale approchée basée sur le développement $O(\varepsilon^6)$ de $J(\Omega_\varepsilon; x^0)$

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \mathcal{J}(0) + \mathcal{T}_3(x^0)\varepsilon^3 + \mathcal{T}_4(x^0)\varepsilon^4 + \mathcal{T}_5(x^0)\varepsilon^5 + \mathcal{T}_6(x^0)\varepsilon^6 + o(\varepsilon^6) \\ &\equiv J^{(6)}(\varepsilon; x^0) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} R(x^0) &= \arg \min_{\varepsilon} J^{(6)}(\varepsilon; x^0) \\ J_{\min}^{(6)}(x^0) &= \min_{\varepsilon} J^{(6)}(\varepsilon; x^0) \end{aligned}$$

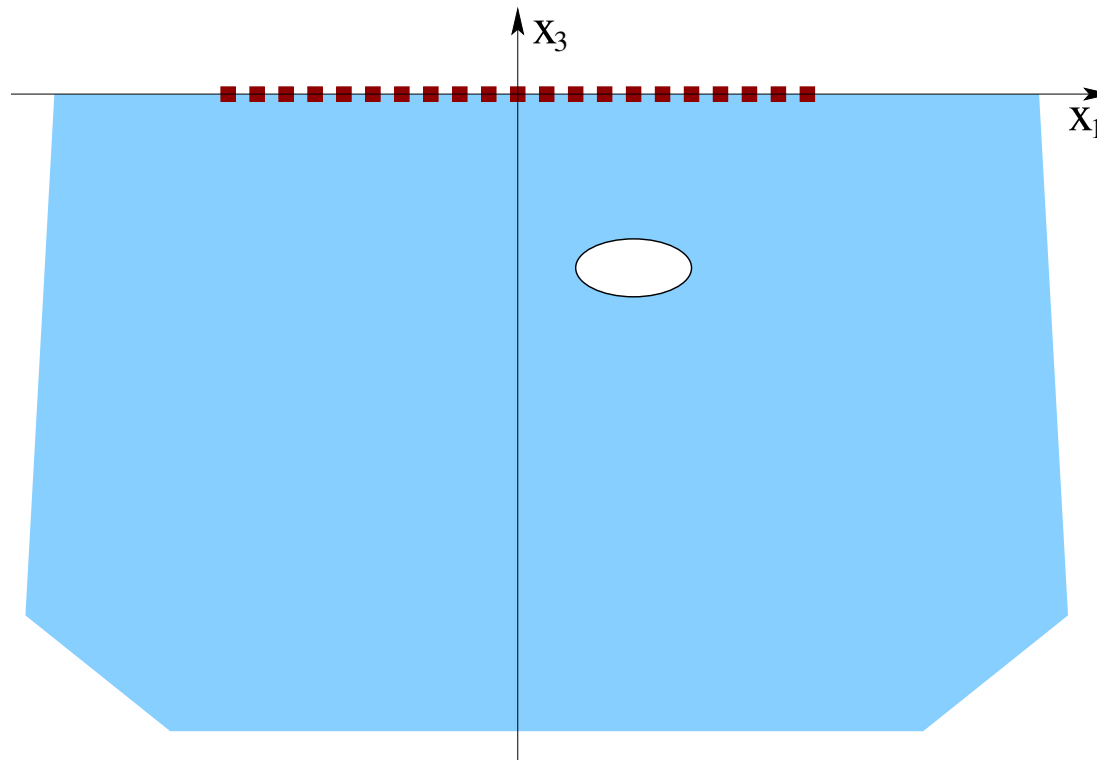
Estimation de l'obstacle à détecter basée sur :

$$x^{\text{est}} = \arg \min_{x^0} \Delta J_{\min}^{(6)}(x^0) \quad R^{\text{est}} = R(x^{\text{est}})$$

où x^0 sont les (nombreux) points d'échantillonnage d'une région de l'espace.

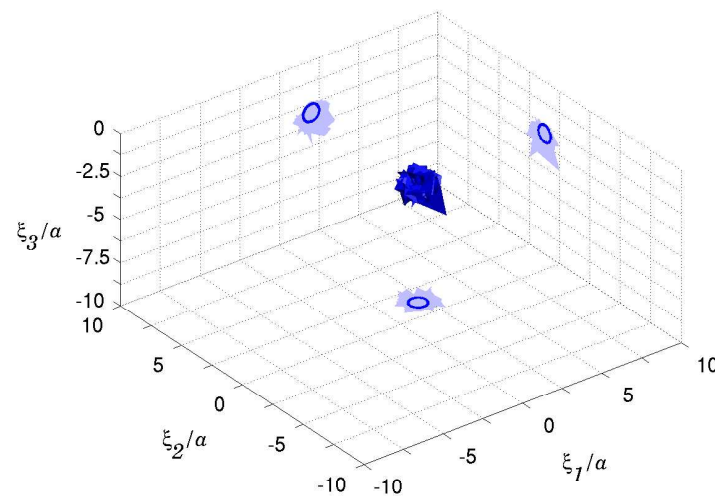
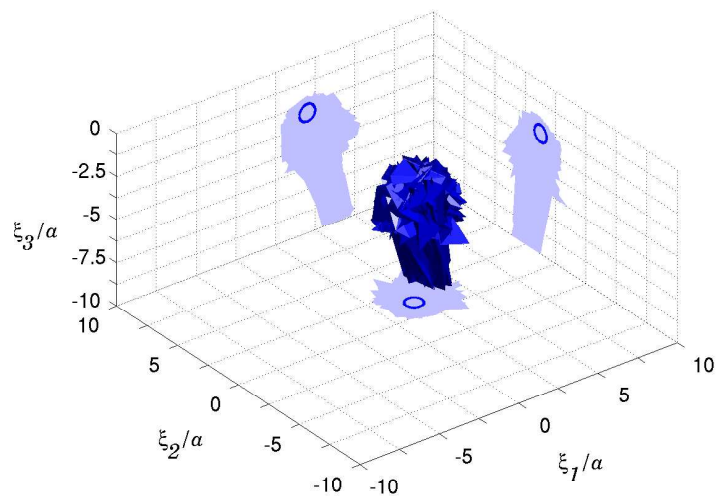
Exemple : ellipsoïde rigide dans un demi-espace acoustique

- centre $(2, 1.2, -3)$, demi-axes $(1, 0.5, 0.5)$
- (20×20) sources, (20×20) points de mesure
- $(51 \times 51 \times 25) = 65025$ points d'échantillonnage



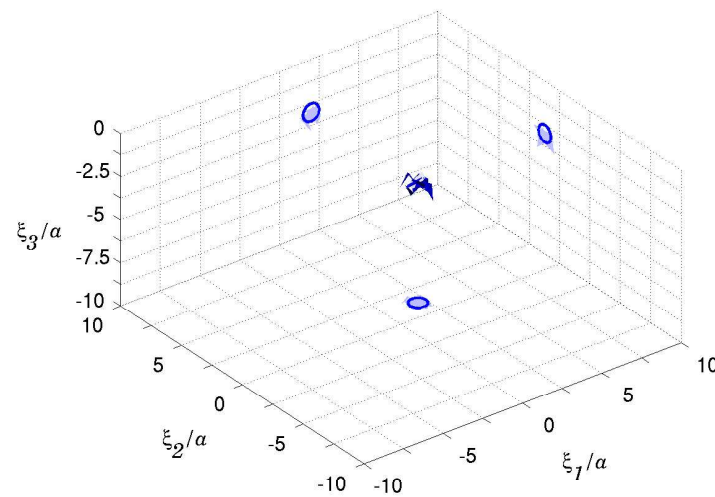
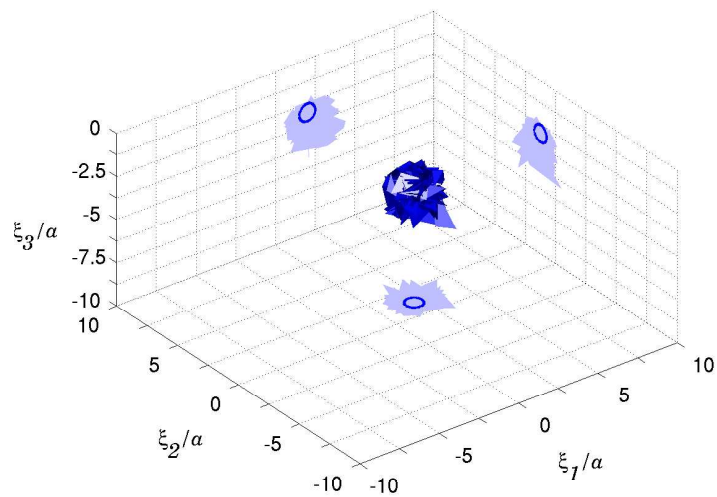
$$R^{\text{est}} = 0.6305, \quad \|x^{\text{est}} - x^{\text{true}}\| = 0.2$$

$$(\omega/c = 0,5)$$



Iso-surface $J^{(6)} = 0.6 J_{\min}^{(6)}$

Iso-surface $J^{(6)} = 0.8 J_{\min}^{(6)}$



Iso-surface $J^{(6)} = 0.7 J_{\min}^{(6)}$

Iso-surface $J^{(6)} = 0.9 J_{\min}^{(6)}$