

Méthode multipôle rapide pour un modèle électromagnétique répondant à un contrôle non destructif sur une pièce de géométrie 3D

T. Lim, G. Pichenot et M. Bonnet

CEA, LIST, CEA Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
LMS Ecole Polytechnique 91120 Palaiseau, France

Tekoing.Lim@cea.fr, <http://www.civa.cea.fr>

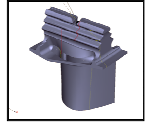


2-4 Nov. 2009 Paris, FR

Contexte de la thèse

- La plateforme CIVA permet de modéliser la réponse d'un capteur sur une pièce de géométrie canonique via la méthode des équations intégrales volumique.
- Ce formalisme utilise des dyades de Green, dont les représentations semi-analytiques sont connues pour les pièces de géométrie canonique.

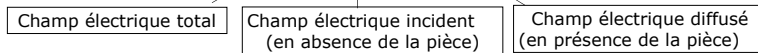
- Forte demande industrielle d'un outil de simulation pour des pièces de géométrie 3D.
- Problème : les expressions des dyades de Green de ces pièces sont inconnues
- Idée : trouver une autre formulation d'équations intégrales, faisant intervenir des fonctions de green de l'espace homogène dont l'expression est connue .



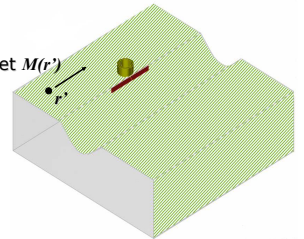
Configuration du problème

- Modélisation de la réponse d'un capteur sur une pièce de géométrie 3D homogène non magnétique de permittivité ϵ_b et de perméabilité μ_b avec un défaut homogène non conducteur

- Formulation Intégrale Purement Surfactive : $E(r) = E^{inc}(r) + E^{scat}(r)$ (équation de Fredholm de seconde espèce)



Vecteurs $J(r')$ et $M(r')$



Dyade et fonction de Green de l'espace homogène ayant les mêmes propriétés électromagnétique que celle de la pièce

$$g(r, r') = \frac{e^{-jk_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$$

$$\text{avec } E^{scat}(r) = -jk_1\mu_b \int_S \tilde{G}_{k_1}(r, r') J(r') dr' + \int_S \nabla' g_{k_1}(r, r') \times M(r') dr'$$

Les inconnues

- On utilise la méthode des moments qui permet de ramener le problème à la résolution d'un système linéaire : $\begin{bmatrix} Z \\ J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^M \\ b^J \end{bmatrix}$
- Résolution du système linéaire afin d'obtenir la reponse de la sonde :
 - Méthode Directe** : inversion de la matrice très couteux car
 - Nombre important d'éléments à calculer ($4N_S^2$)
 - Nécessite une ressource mémoire importante
 - Méthode Itérative** : déterminer M et J en minimisant $\left\| \begin{bmatrix} Z \\ J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ J \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b^M \\ b^J \end{bmatrix} \right\|$

- Solution :
 - Résolution itérative + Méthode Multipôle Rapide (FMM)
 - Matrice Z jamais évalué explicitement
 - Produit Matrice Vecteur $\begin{bmatrix} Z \\ J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M \\ J \end{bmatrix}$ rapide

Application de la méthode multi-pôle rapide dans le domaine CND par CF :

- basse fréquence
- milieu avec atténuation

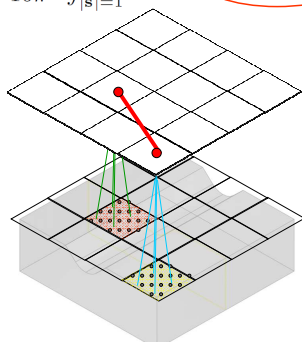
Méthode Multipôle Rapide

- Le calcul des interactions se fait à l'aide de la méthode multipôle rapide (FMM) qui les calcule toutes indirectement.
- La méthode multipôle rapide repose sur une décomposition particulière du noyau de Green

$$g(r, r') = \frac{e^{-jk_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$$

en séparant les termes sources (r') et observations (r) :

$$g(r, r') = \frac{-jk_1}{16\pi^2} \int_{|s|=1} e^{-jk_1s \cdot \vec{O}r} T^L(s, \vec{O}'\vec{O}) e^{-jk_1s \cdot \vec{r}'\vec{O}'} ds$$



Concentration des informations des points sources vers le centre multipôle

Transfert des informations d'un centre multipôle vers un autre centre multipôle

Distribution des informations du centre multipôle vers le point d'observation

Paquet d'observation

Paquet sources

Singularité

- Le noyau de Green $g(r, r') = \frac{e^{-jk_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$ possède une singularité pour $r = r'$
- Cette divergence disparaît lors de l'intégration surfacique, ce qui implique une gestion numérique convenable via des méthodes adaptées.
- On décompose à cet effet le noyau de Green en une partie singulière et une partie régulière, qu'on intègre respectivement via des changements de variables et via une méthode classique :

$$g_{k_1}(r, r') = \underbrace{\frac{1}{4\pi R}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{\left(\frac{jk_1}{4\pi} - \frac{k_1^2}{24\pi} R - \frac{jk_1^3}{3!4\pi} R^2 + \frac{k_1^4}{4!4\pi} R^3 + \dots \right)}_{\text{partie régulière}}$$

Choix de la décomposition Multipôle Rapide

Plusieurs formulations existent : Haute Fréquence (HF) et Basse Fréquence (BF)

Dans la littérature, la FMM n'est utilisée qu'avec un **nombre d'onde réel** (pièces non conductrices).

Dans notre domaine d'applications, la conductivité des pièces ajoute un **terme imaginaire au nombre d'onde** (prise en compte du phénomène d'atténuation).

Pré-étude : tests numériques pour évaluer les temps de calculs avec la méthode directe et la méthode multi-pôle rapide BF et HF pour des applications en CND-CF.

Deux paquets lointains avec 100 points dans chaque paquet

Fréquence = 1k - 10M (Hz)
Conductivité = 0.7 - 30 (MS/m)

Comparaison du temps de calculs:

1. Méthode directe $g(r, r') = \frac{e^{-jk_1|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$

2. Méthode multipôle rapide BF

3. Méthode multipôle rapide HF

$$g(r, r') = \frac{-jk_1}{16\pi^2} \int_{|s|=1} e^{-jk_1s \cdot \vec{O}r} T^L(s, \vec{O}'\vec{O}) e^{-jk_1s \cdot \vec{r}'\vec{O}'} ds$$

10000 interactions à calculer

201 interactions à calculer

Gain de temps de calculs par rapport à la méthode directe	Comparaison des configurations				
	FMM BF	FMM HF	FMM BF	FMM HF	FMM BF
	50 x plus rapide	50 x plus rapide	8 x plus rapide	20 x plus rapide	10 x plus rapide
			Pas de gain	Pas de gain	Pas de gain

Application de la méthode multi-pôle rapide avec un nombre d'onde complexe
Utilisation de la formulation HF dans le domaine CND

Perspectives

- Validations pour des pièces canoniques ou complexe 3D
- Extension de l'approche pour des défauts conducteurs

