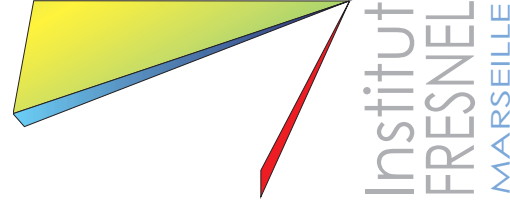


# Indice négatif et champ électromagnétique harmonique.



Boris Gralak,  
équipe CLARTE, Institut Fresnel, Marseille.

GDR “Interférences d’Ondes”, 2-4 novembre 2009.

# La lentille de V. G. Veselago (1968) :

SOVIET PHYSICS USPEKHI

VOLUME 10, NUMBER 4

JANUARY-FEBRUARY 1968

338.30

## THE ELECTRODYNAMICS OF SUBSTANCES WITH SIMULTANEOUSLY NEGATIVE VALUES OF $\epsilon$ AND $\mu$

V. G. VESELAGO

P. N. Lebedev Physics Institute, Academy of Sciences, U.S.S.R.

Usp. Fiz. Nauk 92, 517-526 (July, 1964)

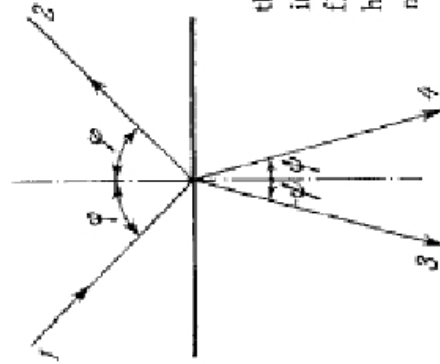


FIG. 3. Passage of a ray through the boundary between two media. 1 - incident ray; 2 - reflected ray; 3 - reflected ray if the second medium is left-handed; 4 - refracted ray if the second medium is right-handed.

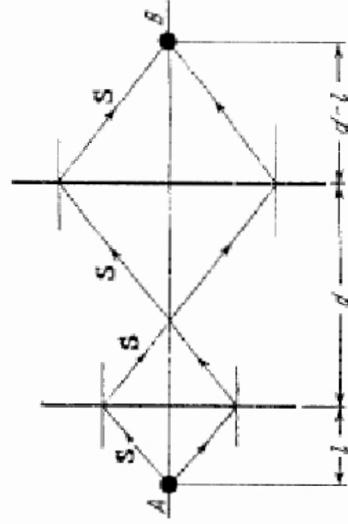
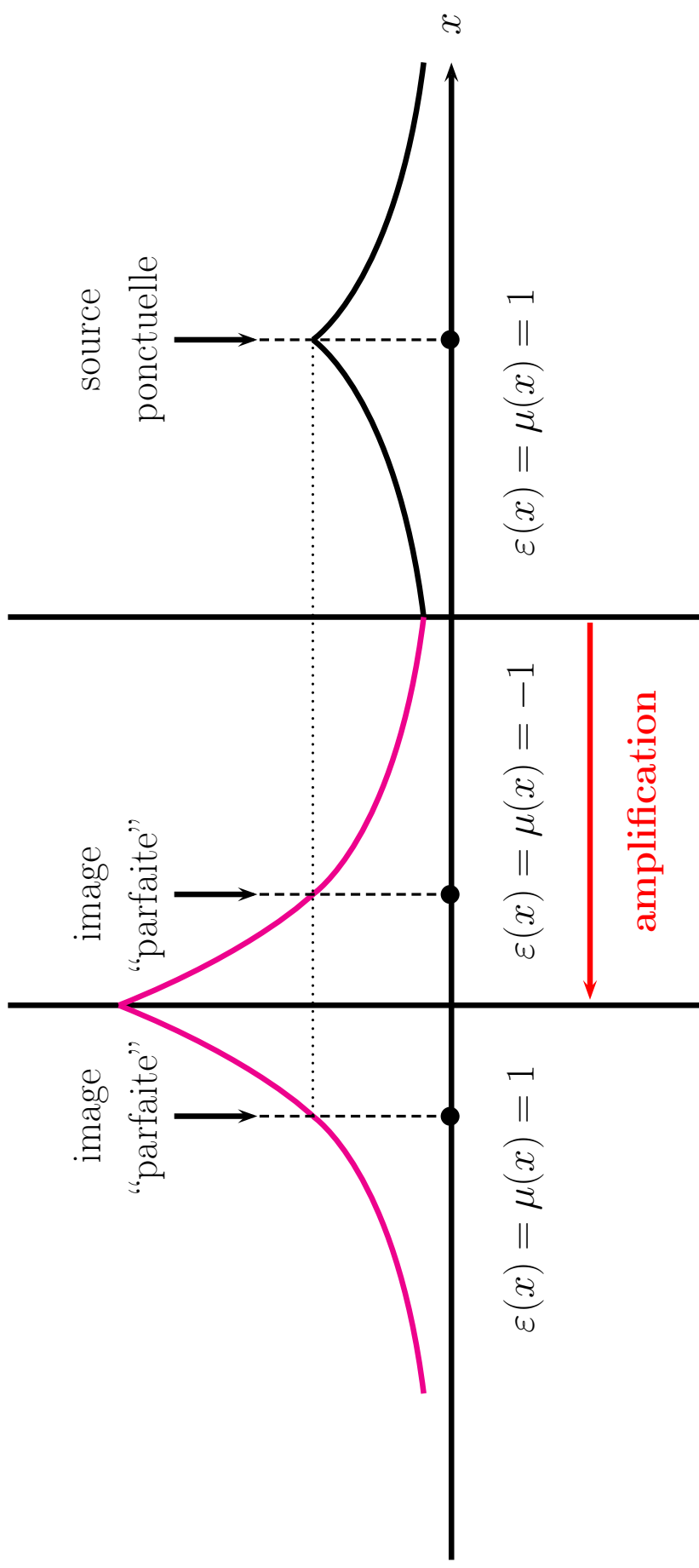


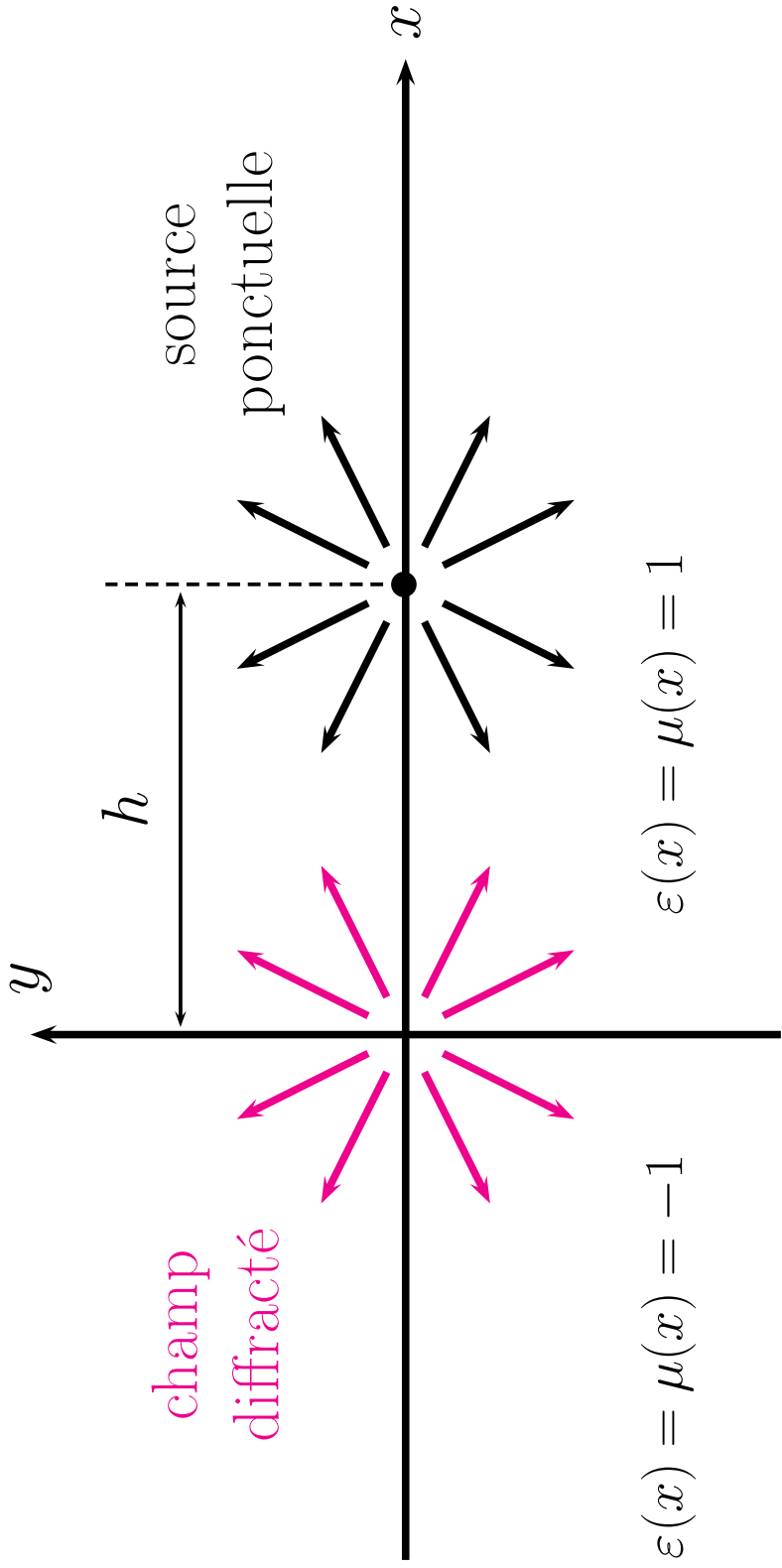
FIG. 4. Passage of rays of light through a plate of thickness  $d$  made of a left-handed substance. A - source of radiation; B - detector of radiation.

# La lentille “parfaite” de J. B. Pendry (2000) :



Energie électromagnétique infinie ? Causalité vérifiée ? ...

# Une seule interface plane séparant de l'air et un milieu d'indice négatif.



## Les équations de Maxwell macroscopiques :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{J}(\mathbf{x}, t), & \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

avec les *relations constitutives*

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t \chi_e(\mathbf{x}, t - s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t \chi_m(\mathbf{x}, t - s) \mathbf{H}(\mathbf{x}, s).\end{aligned}\tag{2}$$

Difficulté de ces équations : la **convolution temporelle**.

## Convolution temporelle et dispersion :

La permittivité  $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)$  et la perméabilité  $\mu(\mathbf{x}, \omega)$  sont définies à partir des susceptibilités  $\chi_e(\mathbf{x}, t)$  et  $\chi_m(\mathbf{x}, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)}{\varepsilon_0} &= 1 + \int_0^\infty dt \exp[i\omega t] \frac{\chi_e(\mathbf{x}, t)}{\varepsilon_0}, \\ \frac{\mu(\mathbf{x}, \omega)}{\mu_0} &= 1 + \int_0^\infty dt \exp[i\omega t] \frac{\chi_m(\mathbf{x}, t)}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Deux possibilités<sup>†</sup>** pour aborder cette situation :

- supposer  $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega)$  et  $\mu(\mathbf{x}, \omega)$  indépendants de  $\omega$  : **ne fonctionne pas** pour modéliser un indice négatif avec  $\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) = -1$ !
- **décomposition des champs en intégrales de Fourier.**

<sup>†</sup>Voir ouvrages de J. D. Jackson, J. G. Van Bladel, L. D. Landau *et al.*

## Les équations de Maxwell harmoniques :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) \exp[-i\omega t], & \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \exp[-i\omega t], \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, \omega) \exp[-i\omega t], \end{aligned} \quad (4)$$

et les amplitudes complexes vérifient

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) &= i\omega\mu(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega), \\ \nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) &= -i\omega\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) + \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

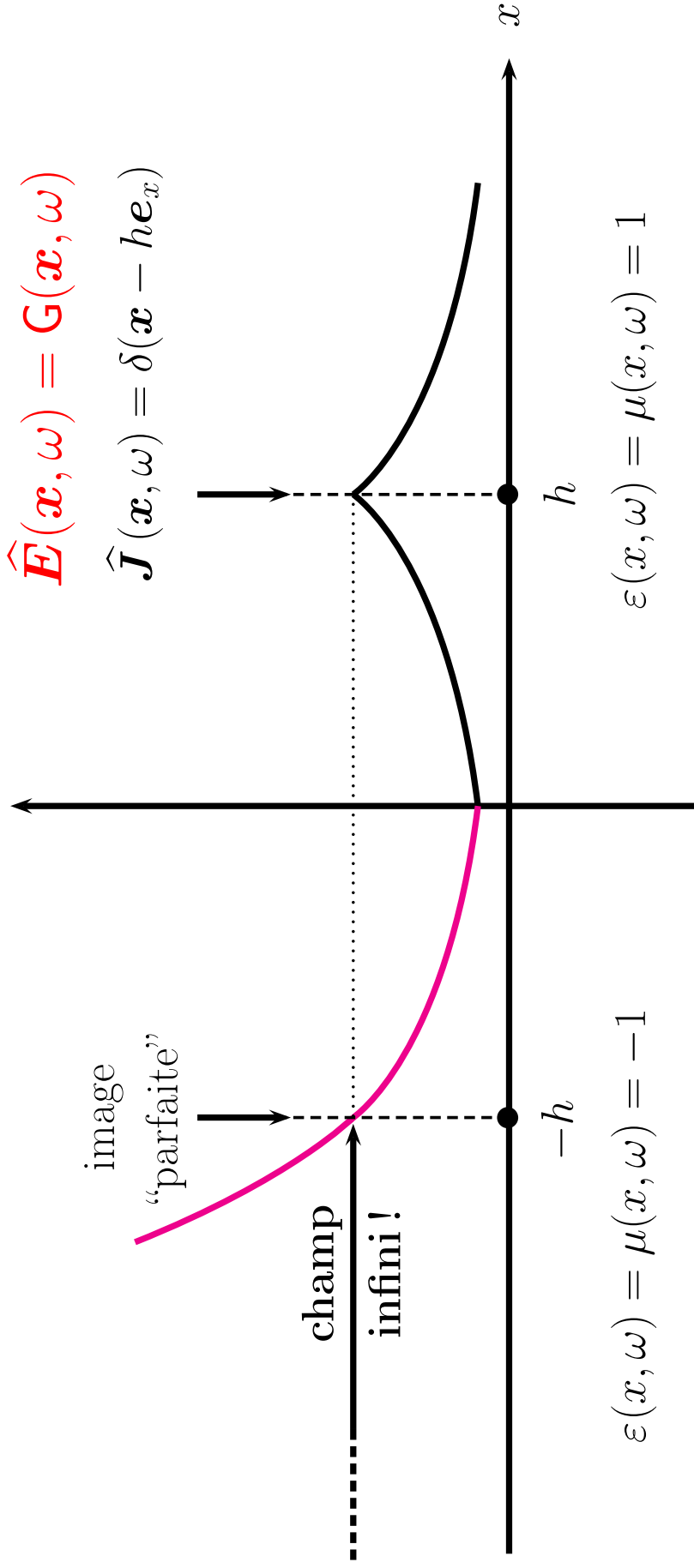
La source de courant est ponctuelle,

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x), \quad (6)$$

et l'amplitude du champ électrique est la fonction de Green :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega). \quad (7)$$

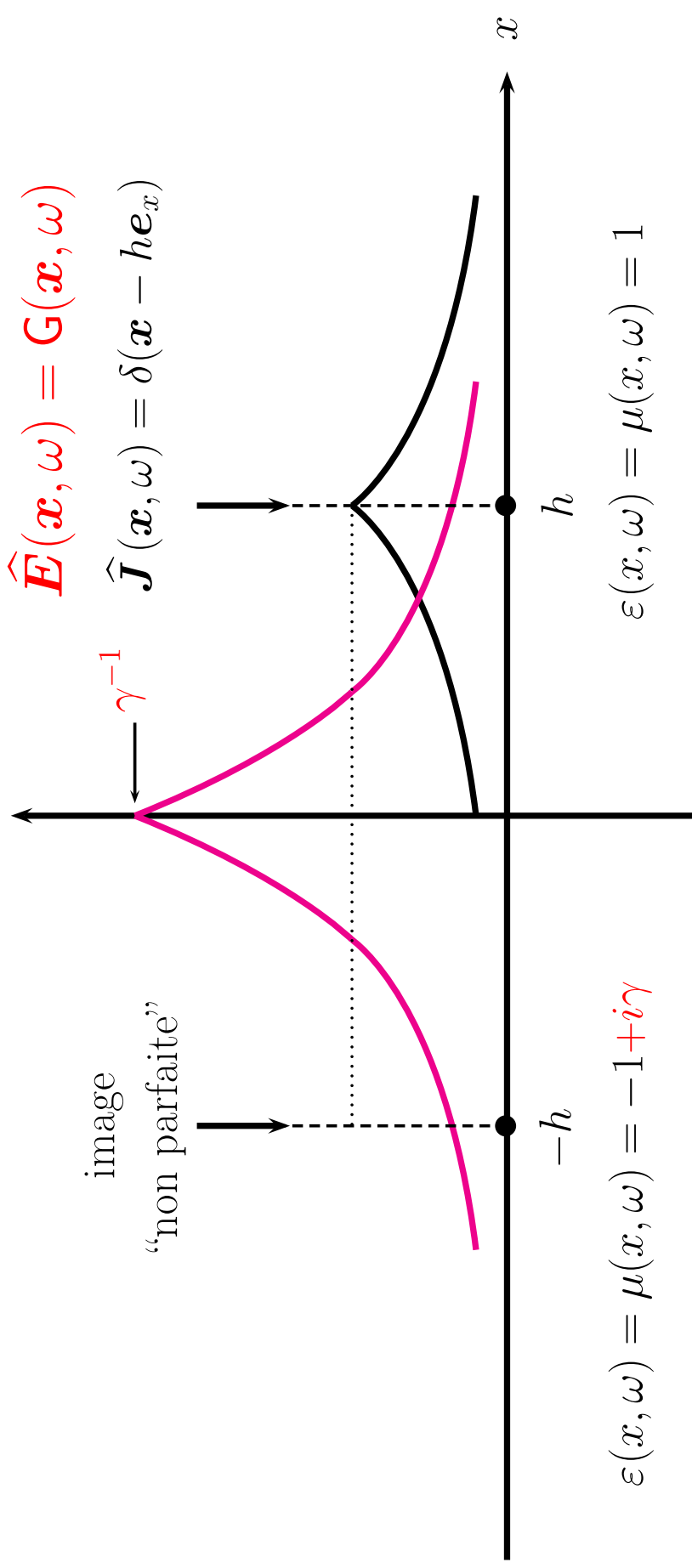
# Indice négatif parfait et ondes évanescentes :



Energie électromagnétique infinie.



# Limite “faible absorption” et ondes évanescentes :



$\gamma \downarrow 0 \implies$  champ qui explose ! La limite  $\gamma \downarrow 0$  n'existe pas.

## Le formalisme des champs auxiliaires de A. Tip :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{A}_e \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_e(\mathbf{x}, t, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}} ds \exp[i\lambda(t-s)] \mathbf{E}(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{A}_m(\mathbf{x}, t, \lambda) &= \int_{\mathbb{R}} ds \exp[i\lambda(t-s)] \mathbf{H}(\mathbf{x}, s). \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{S}(t)$  contenant  $\mathbf{J}(t)$ , les équations de Maxwell s'écrivent

$$\partial_t \mathbf{F}(t) = -i\mathbf{K}\mathbf{F}(t) + \mathbf{S}(t), \quad \mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}. \quad (8)$$

L'indice négatif est représenté par une résonance de Lorentz :

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{\mu(\omega)}{\mu_0} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad \frac{\varepsilon(\omega_1)}{\varepsilon_0} = \frac{\mu(\omega_1)}{\mu_0} = -1, \quad (9)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2/2}.$$

## Solution temporelle des équations de Maxwell :

$$\partial_t \mathbf{F}(t) = -i\mathbf{K}\mathbf{F}(t) + \mathbf{S}(t), \quad \mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}. \quad (10)$$

Cette équation “standard” peut être manipulée “aisément”.

La solution générale de l’équation homogène  $\partial_t \mathbf{F}(t) = -i\mathbf{K}\mathbf{F}(t)$  est

$$\mathbf{F}(t) = \exp[-i\mathbf{K}t] \mathbf{F}(0), \quad \mathbf{S}(t) = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Puis, en faisant “varier la constante”  $\mathbf{F}(0)$  [formule de Duhamel],

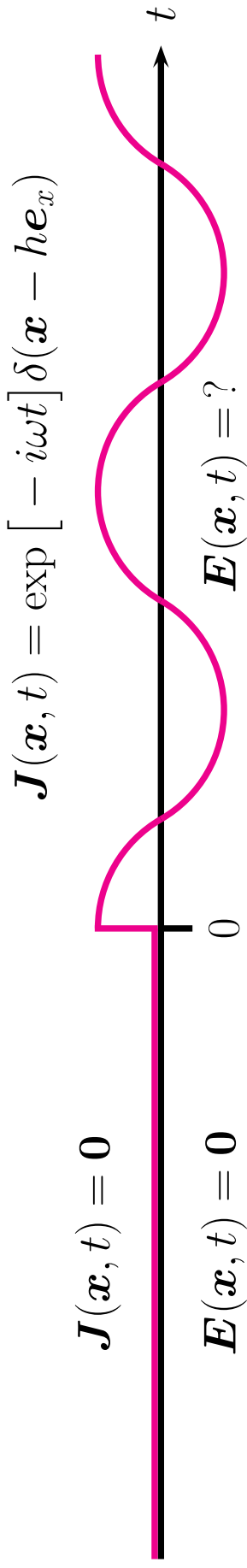
$$\mathbf{F}(t) = \exp[-i\mathbf{K}t] \mathbf{F}(0) + \int_0^t ds \exp[-i\mathbf{K}(t-s)] \mathbf{S}(s), \quad (12)$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t ds \exp[-i\mathbf{K}(t-s)] \mathbf{S}(s), \quad \mathbf{F}(0) = \mathbf{0}.$$

## Excitation monochromatique :

La source ponctuelle est

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \theta(t) \exp[-i\omega t] \delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x). \quad (13)$$



Dans un second temps, la limite  $t \rightarrow +\infty$  est considérée.

Après le régime **transitoire**, un régime **permanent et harmonique** est attendu.

## La transformation de Laplace :

$$\hat{\mathbf{F}}(z) = \int_0^{\infty} dt \exp[izt] \mathbf{F}(t), \quad \text{avec } \text{Im}z > 0. \quad (14)$$

Pour la source  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \theta(t) \exp[-i\omega t] \delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \exp[izt] \theta(t) \exp[-i\omega t] &= \int_0^{\infty} dt \exp[i(z - \omega)t] \\ &= \left[ \frac{\exp[i(z - \omega)t]}{i(z - \omega)} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{i(z - \omega)}. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, z) = -\frac{1}{i(z - \omega)} \delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x). \quad (16)$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned}\nabla \times \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, z) &= iz\mu(\mathbf{x}, z) \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, z), \\ \nabla \times \widehat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, z) &= -iz\varepsilon(\mathbf{x}, z) \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, z) - \frac{1}{i(z - \omega)} \delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x).\end{aligned}\tag{17}$$

L'expression de  $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, z)$  est donc

$$\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, z) = -\frac{1}{i(z - \omega)} \mathbf{G}(\mathbf{x}, z),\tag{18}$$

où  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, z)$  est la fonction de Green, c'est-à-dire le champ rayonné par la source ponctuelle  $\delta(\mathbf{x} - h\mathbf{e}_x)$ .

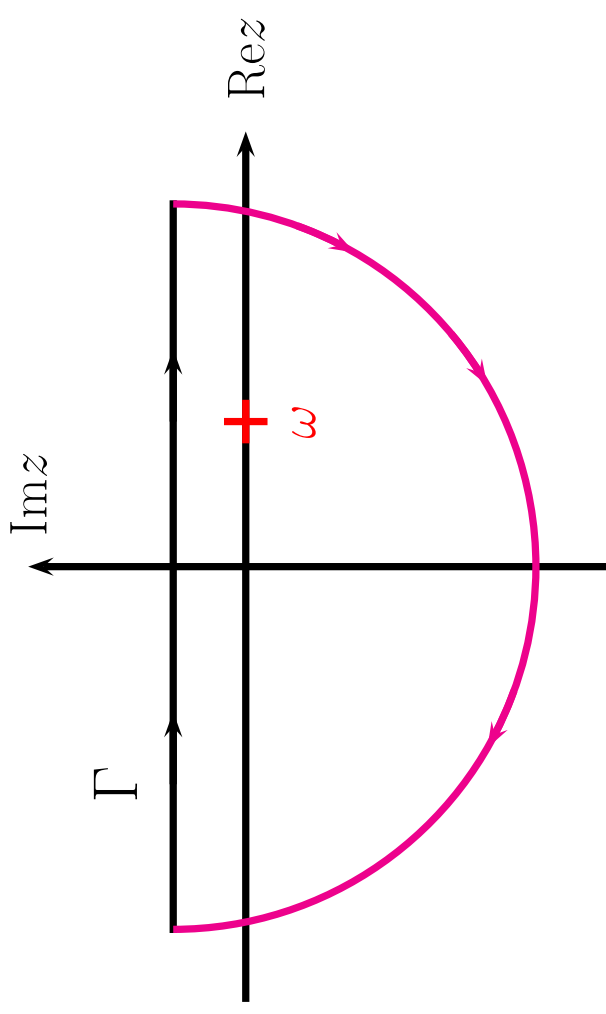
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} dz \exp[-izt] \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, z).\tag{19}$$

## L'expression du champ électrique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} dz \exp[-izt] \frac{1}{z - \omega} \mathbf{G}(\mathbf{x}, z). \quad (20)$$

Pour la limite  $t \rightarrow +\infty$  :

- propriétés analytiques,
- prolongement analytique.



Avec la contribution du pôle en  $\omega$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \exp[-i\omega t] \mathbf{G}(\mathbf{x}, \omega). \quad (21)$$

**Indice négatif parfait :  $\varepsilon(\omega_1) = \mu(\omega_1) = -1$ .**

La fonction de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, z)$  présente **un pôle en  $\omega_1$**  :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{z - \omega_1} \mathbf{U}(\mathbf{x}, z). \quad (22)$$

L'expression du champ électrique devient :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} dz \exp[-izt] \frac{1}{z - \omega} \frac{1}{z - \omega_1} \mathbf{U}(\mathbf{x}, z). \quad (23)$$

Avec la contribution des **deux pôles en  $\omega$  et  $\omega_1$**  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\omega - \omega_1} \exp[-i\omega t] \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) \\ &+ \frac{1}{\omega_1 - \omega} \exp[-i\omega_1 t] \mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Le champ électrique **n'est pas harmonique !**



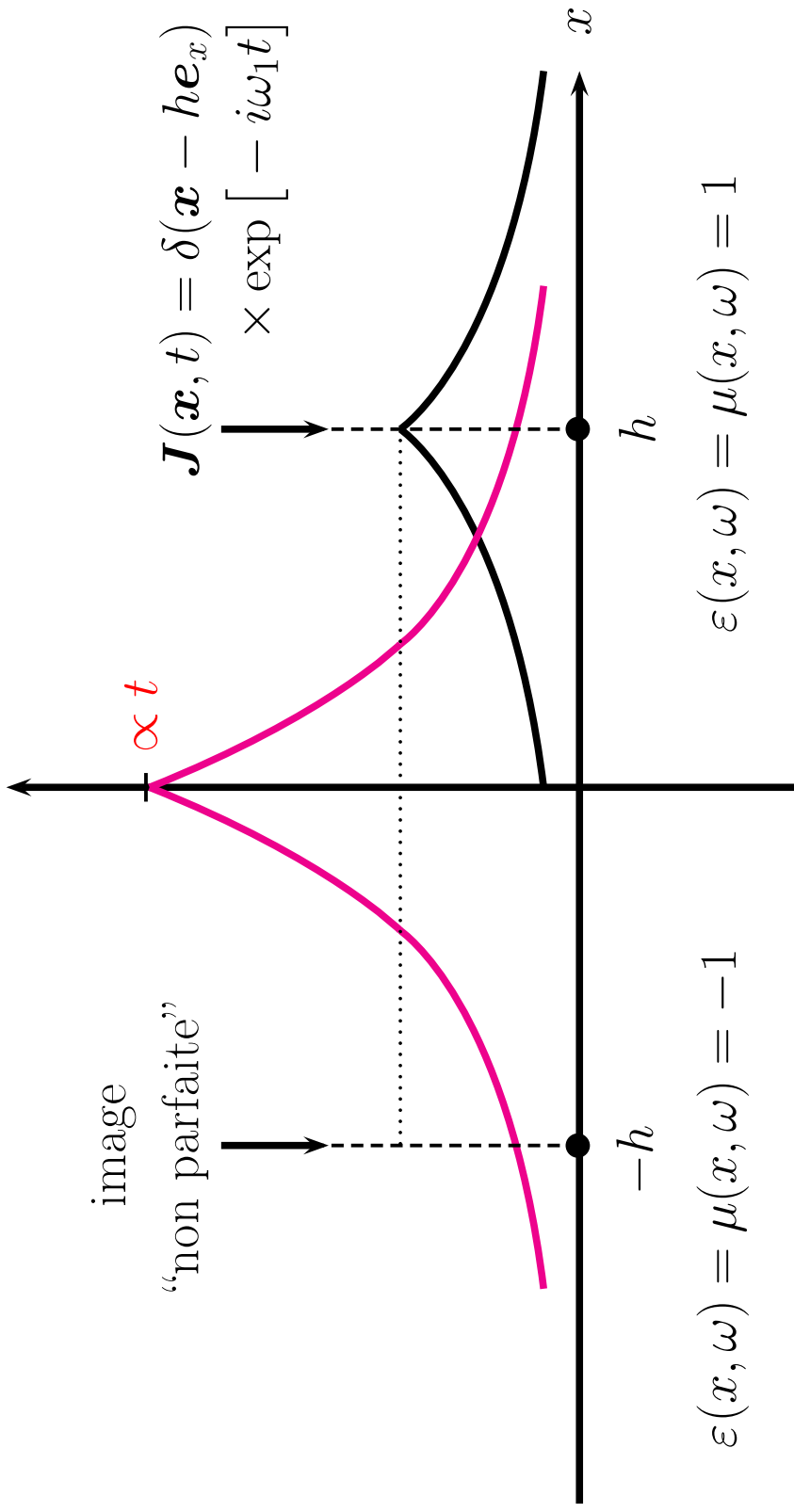
Indice négatif parfait et la limite  $\omega \longrightarrow \omega_1$  :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\exp[-i\omega t]U(\mathbf{x}, \omega) - \exp[-i\omega_1 t]U(\mathbf{x}, \omega_1)}{\omega - \omega_1} \\
 &\xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_1} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \exp[-i\omega t]U(\mathbf{x}, \omega) \right\} \Big|_{\omega_1} \\
 &\xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_1} -it \exp[-i\omega_1 t]U(\mathbf{x}, \omega_1) \\
 &\quad + \exp[-i\omega_1 t] \frac{\partial U}{\partial \omega}(\mathbf{x}, \omega_1).
 \end{aligned} \tag{25}$$

Cette expression est valable pour  $t \longrightarrow +\infty$  :

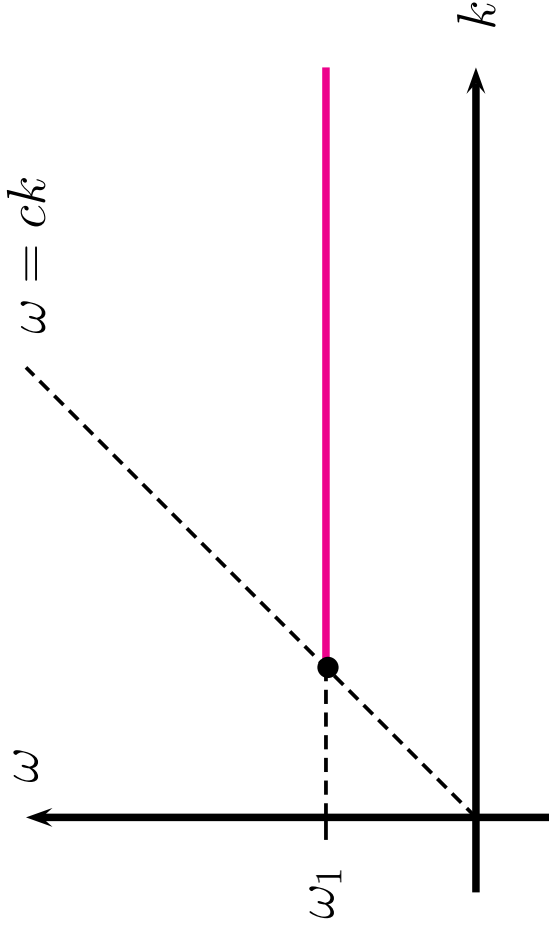
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \underset{\omega \rightarrow \omega_1}{\approx} -it \exp[-i\omega_1 t]U(\mathbf{x}, \omega_1). \tag{26}$$

# Solution temporelle pour $t \rightarrow +\infty$ :

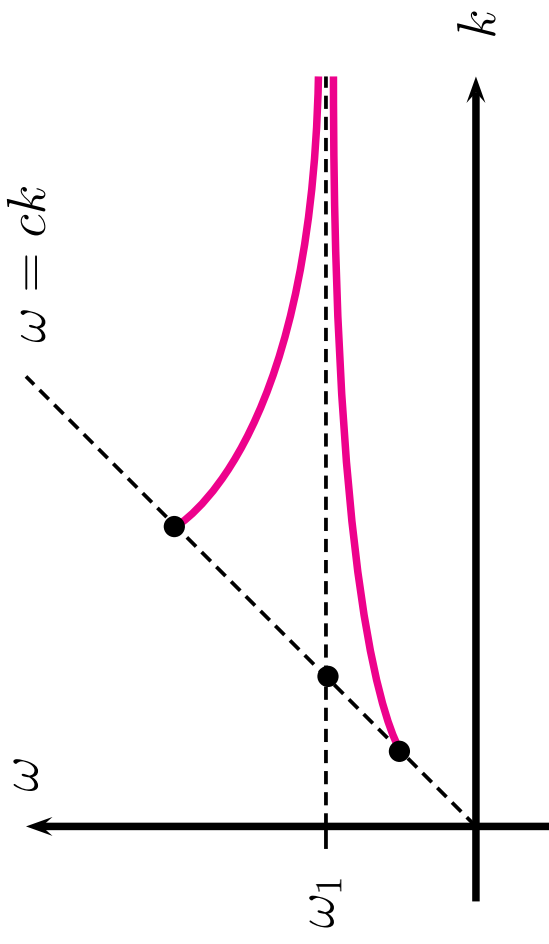


**Résultat** : résolution finie avec un indice négatif parfait.

# Relation de dispersion :



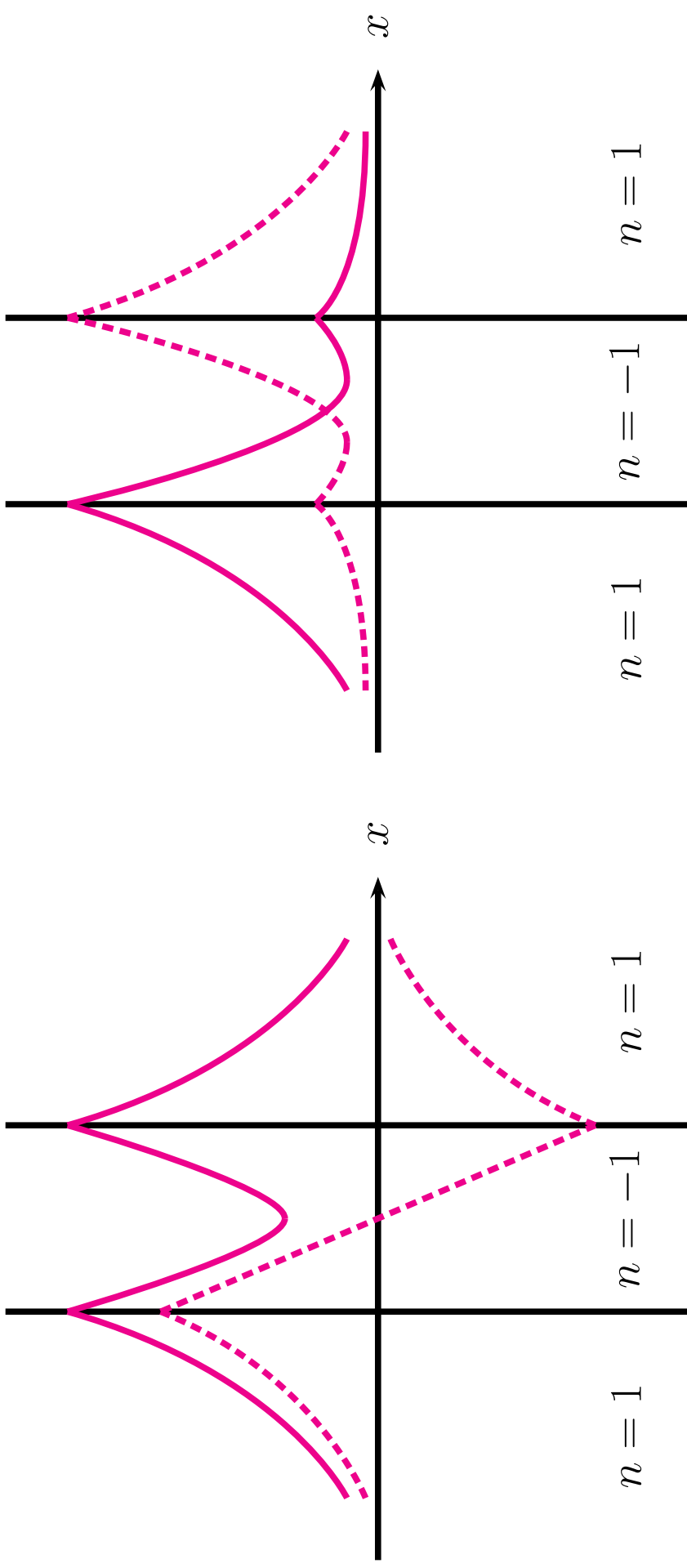
1 interface



2 interfaces

1 mode symétrique et 1 mode antisymétrique

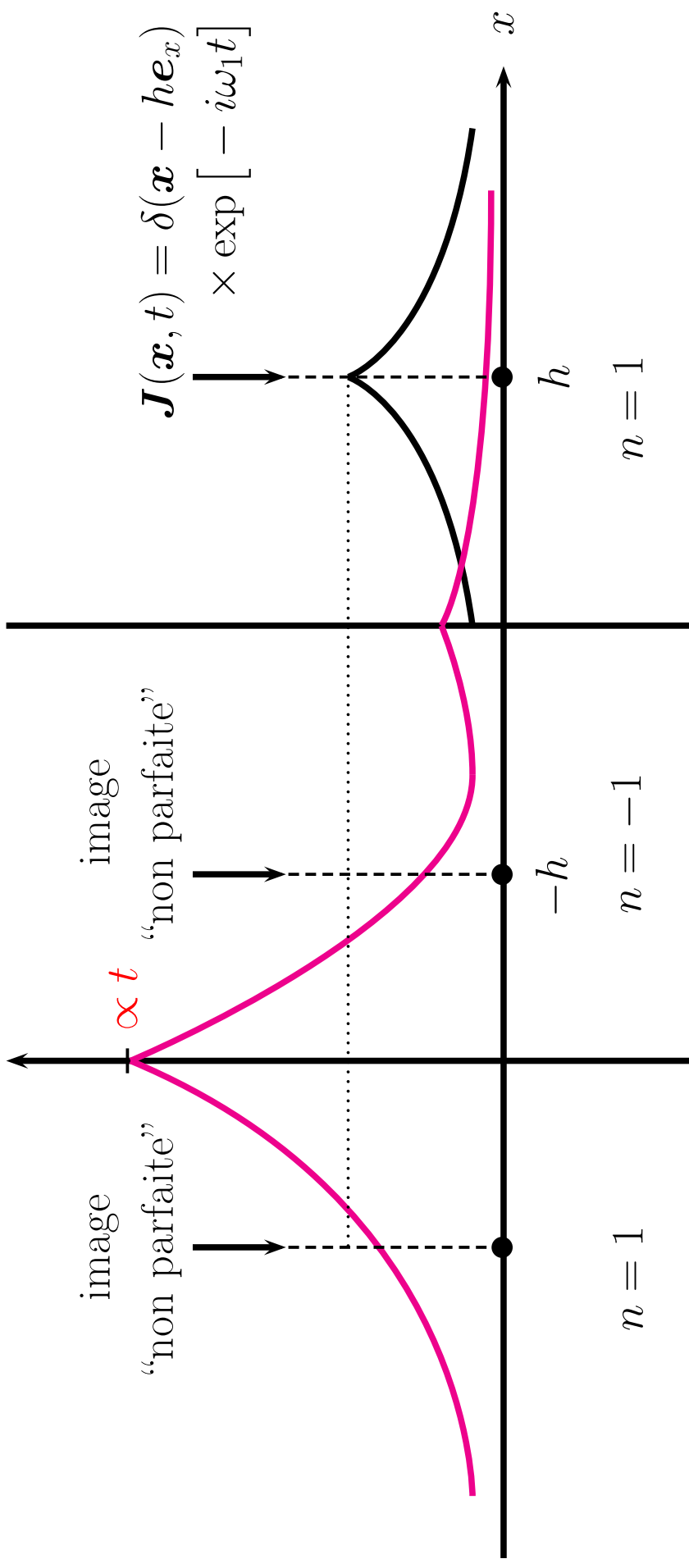
# Les modes de la lentille “parfaite” :



mode symétrique  $\pm$  mode antisymétrique

mode sur interface 1 ou mode sur interface 2

# Solution temporelle pour la lentille “parfaite” :



Résultat : résolution finie avec un indice négatif parfait.